Ueber die

Bewegung eines materiellen Punktes

auf der

Fläche eines Rotationsparaboloids.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht von

Artur Sonntag

aus Lonzig.

MARBURG.

1879.

§. 1.

Die Bewegung eines freien Punktes ist durch die Anfangslage, die Anfangsgeschwindigkeit und das Gesetz der Beschleunigung bestimmt. Die Freiheit des Punktes hat im allgemeinen drei Grade: wird aber ausser den über den Anfang der Bewegung zu treffenden Bestimmungen dem gegebenen Punkte noch die Bahn vorgeschrieben, dann tritt ein Zwang hinzu, der einen oder mehr Grade von Gebundenheit bedingt. Soll sich der Punkt auf einer Oberfläche bewegen, so wird ein Grad der Freiheit vernichtet. Von welcher Art auch der auf einen Punkt ausgeübte Zwang sein mag, immer wird er die Geschwindigkeit desselben modificiren; mithin kann man bei vorgeschriebener Fläche diesen Zwang durch eine solche Beschleunigung ersetzen, dass sie mit der gegebenen Beschleunigung zusammengenommen eine Resultante liefert, welche im Verein mit den Anfangsbestimmungen die Bahn des Punktes der gegebenen Bedingung unterwirft. Die Beschaffenheit dieser hinzuzufügenden Beschleunigung ist abhängig von der gegebenen Geschwindigkeit und von der vorgeschriebenen Bahn, sie heisst die Beschleunigung des Widerstandes der Bahn oder der Spannung. Wie sich der materielle Punkt auf einer gegebenen Fläche bewegen soll, kann man sich in verschiedener Weise denken. Man betrachtet die Fläche als eine dünne Schale aus einem festen Material, oder man nimmt zwei unendlich nahe Schalen an, zwischen denen der Punkt sich bewegt. Bei manchen Flächen, wie z. B. bei der Kugel und beim Rotationsellipsoid kann man sich den Punkt durch einen oder mehrere Fäden an die Fläche gebunden denken. Als Analogon zu der Huyghens-Monge'schen Fadenconstruction für Curven einfacher und doppelter Krümmung gibt es eine allgemeine Methode, wie man einen materiellen Punkt nöthigen kann auf einer Fläche zu bleiben. Für das Rotationsparaboloid würde sich diese Methode etwa folgendermassen gestalten.

Auf dem Rotationsparaboloid gibt es zwei Schaaren von Krümmungslinien, die sich rechtwinklig schneiden, und in deren Richtungen

die Fläche am schwächsten und am stärksten gekrümmt ist. Die eine Schaar wird gebildet von den Meridiancurven, die andere von den Parallelkreisen. Bei beiden Schaaren von Krümmungslinien, die in unserem Falle ebene Curven sind, schneiden sich zwei aufeinander folgende Normalen. Die entstehenden zwei Schaaren von unendlich vielen abwickelbaren Flächen sind im vorliegenden Falle Ebenen. Fasst man eine einzige Krümmungslinie, also auch eine einzige abwickelbare Fläche ins Auge, so erhält man durch die Schnittpunkte der Normalen oder, was dasselbe ist, durch die Schnittpunkte der Erzeugungslinien der abwickelbaren Fläche ihre Wendungscurve. In unserm Falle schrumpft für die Parallelkreise die Wendungscurve in einen Punkt der Rotationsaxe zusammen, für die Meridiancurven ist dieselbe eine ebene Curve. Die Wendungscurve ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte aller Normalschnitte der Fläche, welche die Krümmungslinien berühren. Macht man die Construction für alle Krümmungslinien, so erhält man die Krümmungsmittelpunktfläche der gegebenen Oberfläche; diese kann man aber auch auffassen als Umhüllungsfläche aller abwickelbaren Flächen, welche sie nothwendig berührt. Man sieht hieraus, dass die Krümmungsmittelpunktfläche im allgemeinen in zwei Theile, Fächer genannt, zerfällt, von denen das eine die Mittelpunkte stärkster Krümmung, das andere die Mittelpunkte schwächster Krümmung enthält. Nun berührt jede Normale einer Curve der Krümmungsmittelpunkte der einen und eine Curve der Krümmungsmittelpunkte der andern Art, folglich berührt sie auch die beiden Fächer der Krümmungsmittelpunktfläche. Demnach berühren die sämmtlichen Normalen einer Fläche eine gewisse andere Fläche, die Krümmungsmittelpunktfläche der ersten, doppelt oder jedes der beiden getrennten Fächer derselben. Wenn also eine starre Gerade längs der Fläche der Krümmungsmittelpunkte hingleitet und dieselbe in der angegebenen Weise doppelt berührt, dann bewegt sich ihr Endpunkt oder ein anderer ihrer Punkte auf der gegebenen Fläche. Bei dem Rotationsparaboloid schrumpft das eine der beiden Fächer, welches den Parallelkreisen als Krümmungslinien entspricht, in eine gerade Linie, die Rotationsaxe zusammen, das andere Fach wird gebildet durch das Continuum der Evoluten der rotirenden Parabel, welche das Rotationsparaboloid erzeugt hat.

Die Gleichung der in einer beliebigen durch die z-Axe gehenden uz-Ebene gelegenen Parabel des Rotationsparaboloids ist

$$u^2 = 2az,$$

also $\frac{du}{dz} = \frac{a}{u} = u'$, $\frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{a}{u^2}\frac{du}{dz} = -\frac{a^2}{u^3} = u''$.

Nun hat man allgemein für eine Curve von der Gleichung $u = f(z)$ als Coordinaten ξ und ζ des Krümmungsmittelpunktes

$$\xi = u + \frac{1+u'^2}{u''}, \quad \zeta = z - u'.\frac{1+u'^2}{u''};$$

also in unserm Falle

$$\xi = u - \frac{1+\frac{a^2}{u^2}}{a^2/u^3} = -\frac{u^3}{a^2}, \text{ also } u = \sqrt[3]{-a^2\xi} \text{ und}$$

$$\zeta = z + \frac{a}{u}\cdot\frac{1+\frac{a^2}{u^2}}{a^2/u^3} = z + \frac{a}{u}\cdot\frac{(u^2+a^2)u}{a^2} = 3z + a, \text{ also } z = \frac{\zeta - a}{3}.$$

Setzt man diese Werthe ein in die Gleichung $u^2 = 2az$, so erhält man

$$\sqrt[3]{a^4\xi^2} = 2a\frac{\zeta - a}{3}, \qquad \xi = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2(\zeta - a)^3}{3a}},$$

wobei das Wurzelzeichen negativ genommen ist, damit der untere Zweig der Evolute dem oberen Zweige der Evolvente entspreche.

Es ist leicht zu sehen, dass die Evolute der gegebenen Parabel die semicubische oder Neilsche Parabel ist: sie besteht aus zwei Zweigen, die, symmetrisch gegen die z-Axe, sich im Brennpunkte der Parabel schneiden, denn für $z = o$ wird $\zeta = a$.

Lässt man die erhaltene Curve um die z-Axe rotiren, so entsteht eine Rotationsfläche, deren Gleichung

$$x^2 + y^2 = \frac{8}{27}\cdot\frac{(z-a)^2}{a}$$

ist, wenn wieder x und z statt ξ und ζ geschrieben werden. Die durch diese Gleichung dargestellte Rotationsfläche ist das zweite Fach der Krümmungsmittelpunktfläche des Rotationsparaboloids. Ein Punkt der starren Geraden, welche diese Fläche immer berührt und durch die Drehungsaxe hindurchgeht, beschreibt eine Curve auf dem gegebenen Rotationsparaboloid.

§. 2.

Bezeichnet man mit $F(x, y, z) = o$ die Gleichung der gegebenen Oberfläche, mit m die Masse des beweglichen materiellen Punktes, mit

N, N_x, N_y, N_z die Normalwiderstandskraft und ihre drei Componenten und endlich mit λ, μ, ν die Richtungswinkel der Flächennormale, dann ist

$$\cos\lambda = \frac{\partial F/\partial x}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{\partial F/\partial y}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{\partial F/\partial z}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}};$$

$$N_x = -N.\ \frac{\partial F/\partial x}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$N_y = -N.\ \frac{\partial F/\partial y}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$N_z = -N.\ \frac{\partial F/\partial z}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Bezeichnet man ferner mit X, Y, Z die Componenten der bewegenden Kraft, so sind die Bewegungsgleichungen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X - N.\ \frac{\partial F/\partial x}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y - N.\ \frac{\partial F/\partial y}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}, \quad \ldots\ (1)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z - N.\ \frac{\partial F/\partial z}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Diese drei Gleichungen bestimmen im Verein mit der Gleichung der Fläche die Bewegung des materiellen Punktes.

Im vorliegenden Falle des Rotationsparaboloids ist

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2az = o, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2a.$$

Die einzige äussere Kraft, welche auf den materiellen Punkt wirkt, ist die Schwerkraft; dieselbe wirkt vertikal abwärts, der Richtung der z-Axe entgegengesetzt: mithin sind die Componenten der bewegenden Kraft

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z = -mg,$$

und die Gleichungen (1) erhalten die Gestalt

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -N.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -N.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}, \quad \ldots \quad (2)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg + N.\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}.$$

§. 3.

Wir ziehen nun zunächst die Möglichkeit des Falles in Betrachtung, dass der materielle Punkt den durch die Anfangslage $z = h$ bestimmten Horizontalkreis durchläuft, so dass z constant und $x^2 + y^2 = 2ah$ ist. Die Bewegungsgleichungen reduciren sich für diese Annahme auf:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + N.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}} = o,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + N.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}} = o, \quad \ldots \quad (3)$$

$$-mg + N.\frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}} = o.$$

Es wird also

$$N = \frac{mg}{a}.\sqrt{x^2+y^2+a^2} = mg.\sqrt{\frac{a+2h}{a}}.$$

Aus den Gleichungen (3) ergibt sich

$$m.\frac{2dxd^2x+2dyd^2y}{dt^2}+\frac{N}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}\left(2xdx+2ydy\right)=o;$$

aus der Curvengleichung: $2xdx+2ydy=o$, folglich

$$m.\frac{2dxd^2x+2dyd^2y}{dt^2}=mdv^2=o, \text{ mithin}$$

$$v^2=\text{const.},$$

d. h. die kreisförmige Bewegung des materiellen Punktes ist eine gleichförmige.

Dasselbe Resultat erhält man, wenn man aus den Gleichungen (3) bildet:

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=o, \text{ also}$$

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=\text{const.}$$

Setzt man $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, so geht die Gleichung über in

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=\text{const.}$$

d. h. die Projection des Radiusvector auf die xy-Ebene beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.

Aus den Gleichungen (3) folgt ferner

$$m\frac{xd^2x+yd^2y}{dt^2}+N.\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}=o;$$

aus der Curvengleichung:

$$xdx+ydy=o, \text{ also } \frac{xd^2x+yd^2y}{dt^2}+\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}=o, \text{ folglich}$$

$$m.\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}-N.\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}=o,$$

$$mv^2-\frac{Nr^2}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}=o, \quad mv^2-\frac{mg}{a}r^2=o,$$

$$v^2=\frac{gr^2}{a}, \text{ oder da } x^2+y^2=r^2=2ah \text{ ist,}$$

$$v^2 = 2gh\,,\quad v = \pm\sqrt{2gh}.$$

Diese Gleichung gibt die Bedingung, unter welcher sich der materielle Punkt auf dem durch die Anfangslage bestimmten Parallelkreise bewegt. Ist demnach die gegebene Anfangsgeschwindigkeit $c = \pm\sqrt{2gh}$, so wird der materielle Punkt den Parallelkreis, auf welchem er sich beim Beginn der Bewegung befindet, nicht verlassen. $\sqrt{2gh}$ ist aber die Geschwindigkeit, welche der materielle Punkt erlangt, wenn er die Höhe h, also von seiner Anfangslage bis zum Scheitelpunkte des Rotationsparaboloids herunterfällt. Es sei P der augenblickliche Ort des materiellen Punktes und durch P und die z-Axe eine Ebene gelegt, NP sei die Normale in P, $MP \perp OZ$, $\sphericalangle MNP = \sphericalangle \vartheta$, dann ist die Subnormale MN gleich dem Halbparameter a; ferner $MP = r$, also $tg\vartheta = \frac{r}{a}$. Nun ist aber ϑ der Winkel, welchen die Normale PN der Parabel, also auch des Rotationsparaboloids mit der z-Axe bildet, also

$$\cos\vartheta = \frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}},\quad tg\vartheta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}} = \frac{r}{a},$$

$$\sin\vartheta = \frac{r}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}};$$

mithin

$$\frac{mv^2}{r} = N\sin\vartheta\,,\quad \frac{mv^2}{r} = mg.tg\vartheta.$$

Demnach ist die Centripetalkraft $\frac{mv^2}{r}$ die Resultante der beiden Kräfte N und mg.

Der Weg einer Umdrehung ist die Peripherie des Horizontalkreises $x^2 + y^2 = 2ah$, also gleich $2\pi\sqrt{2ah}$, also, da $v = \sqrt{2gh}$ ist, die Dauer eines Umlaufs

$$\frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Somit ist die Umlaufszeit gleich der Oscillationsdauer eines Pendels von der Länge der Subnormale der Meridianparabel bei sehr kleinen Flongationen. Der Ausdruck für die Umlaufszeit enthält die Grösse h nicht, mithin ist dieselbe für alle Parallelkreise dieselbe, wie schon Euler und Huyghens gefunden haben.

§. 4.

Aus den Gleichungen (1) ergeben sich:

$$-\frac{N}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}} = \frac{m}{x}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m}{y}\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = o, \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \text{const.}$$

Ferner aus (2):

$$m\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} = -mgdz - \frac{N}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}$$

$$\times\left(xdx + ydy - adz\right) = -mgdz, \text{ also}$$

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = v^2 = -2gz + \text{const.} \qquad (4)$$

Man sieht, dass die letzten Gleichungen nichts anders sind als Folgerungen aus dem Princip der Flächen und der lebendigen Kraft, welche bei unserem Problem Anwendung finden mussten.

Bezeichnet man die Anfangsgeschwindigkeit des beweglichen Punktes mit c, so ergibt sich aus (4) zur Bestimmung der Integrationsconstanten:

$$c^2 = -2gh + \text{const., also}$$

$$v^2 = c^2 + 2g(h-z) \qquad (5)$$

Wenn die gegebene Anfangsgeschwindigkeit die Richtung der Tangente des durch den Ausgangspunkt gehenden Parallelkreises hat, dann ist

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = o \text{ und } \left(\frac{dx}{dt}\right) = o;$$

letzteres ist der Fall, da man annehmen kann, dass der Ausgangspunkt der Bahn auf der x-Axe, also die Tangente parallel der y-Axe liegt. Aus der Gleichung

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \text{const.},$$

ergibt sich demnach:

$$c\sqrt{2ah} = \text{const.},$$

also

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c\sqrt{2ah} = C. \qquad (6)$$

Aus der Gleichung des Rotationsparaboloids und aus Gleichung (6) erhält man ferner:

$$x^2dx^2 + y^2dy^2 + 2xydxdy = a^2dz^2$$
$$y^2dx^2 + x^2dy^2 - 2xydxdy = C^2dt^2$$
$$(x^2+y^2)(dx^2+dy^2) = a^2dz^2 + C^2dt^2,$$
$$2az\left(-dz^2 + [c^2 + 2g(h-z)]dt^2\right) = a^2dz^2 + C^2dt^2$$
$$\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2ac^2z + 4agz(h-z) - C^2}{a^2+2az}},\quad C = c\sqrt{2ah},$$
$$\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{\frac{(4gz-2c^2)(h-z)}{a+2z}},$$

Dabei entspricht das positive Vorzeichen dem Steigen des beweglichen Punktes, das negative dem Fallen desselben.

Es ergeben sich ferner

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ax\frac{dz}{dt} - Cy}{2az},\quad \frac{dy}{dt} = \frac{ay\frac{dz}{dt} + Cx}{2az};$$

oder

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ax\sqrt{(4gz-2c^2)(h-z)} - Cy\sqrt{a+2z}}{\sqrt{a+2z}\,.\,2az},$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{ay\sqrt{(4gz-2c^2)(h-z)} + Cx\sqrt{a+2z}}{\sqrt{a+2z}\,.\,2az},$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(g(x^2+y^2)-ac^2)(2ah-x^2-y^2)} + \frac{C}{\sqrt{a}}\frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2+a^2}}{\frac{x}{y}\sqrt{(g(x^2+y^2)-ac^2)(2ah-x^2-y^2)} - \frac{C}{\sqrt{a}}\sqrt{x^2+y^2+a^2}}.$$

Diese Differentialgleichung der Bahnprojection auf die xy-Ebene gestaltet sich etwas einfacher in Polarcoordinaten:

$$r^2 = x^2 + y^2,\quad x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,$$
$$r^2d\varphi = Cdt = c\sqrt{2ah}\,dt = c\sqrt{2ah}\sqrt{\frac{a+2z}{(4gz-2c^2)(h-z)}}\,dz,$$

$$d\varphi = c\sqrt{\frac{h}{2a}}\,\frac{\sqrt{a+2z}\,dz}{z\sqrt{(4gz-2c^2)(h-z)}} = c\sqrt{2h}\cdot\frac{\sqrt{a^2+r^2}\,dr}{r\sqrt{(gr^2-a^2c^2)(2ah-r^2)}}.$$

Der materielle Punkt wird während seiner Bewegung höchste und tiefste Lagen auf dem Rotationsparaboloid erreichen, in denen er umkehrt und seine Bahn nach unten resp. nach oben fortsetzt. Diese Umkehrungspunkte werden bestimmt durch Maxima und Minima von z; in ihnen muss $\frac{dz}{dt} = o$ sein. Es wird aber

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{(4gz-2c^2)(h-z)}{a+2z}} = o$$

für $z = h$ und für $z = \frac{c^2}{2g}$.

Um nun zu untersuchen, ob Maximum oder Minimum, muss man bilden

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(a+2z)\left[(h-z)4g-4gz+2c^2\right]-2(4gz-2c^2)(h-z)}{(a+2z)^2}.$$

Mithin wird

I für $z = h$

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) \begin{cases} > o, & \text{wenn } c > \sqrt{2gh}, \text{ also } z = h \text{ ein Minimum,} \\ = o, & \text{wenn } c = \sqrt{2gh}, \text{ also unbestimmt, ob Maxim. od. Minim.} \\ < o, & \text{wenn } c < \sqrt{2gh}, \text{ also } z = h \text{ ein Maximum.} \end{cases}$$

II für $z = \frac{c^2}{2g}$

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) \begin{cases} > o, & \text{wenn } c < \sqrt{2gh}, \text{ also } z = \frac{c_2}{2g} \text{ ein Minimum,} \\ = o, & \text{wenn } c = \sqrt{2gh}, \text{ also unbestimmt, ob Maxim. od. Minim.} \\ < o, & \text{wenn } c > \sqrt{2gh}, \text{ also } z = \frac{c^2}{2g} \text{ ein Maximum.} \end{cases}$$

Wir fassen diese Resultate noch einmal zusammen und unterscheiden die drei Fälle:

1) $c > \sqrt{2gh}$, d. h. $\frac{c^2}{2g} > h$; $z = \frac{c_2}{2g}$ ist ein Maximum, $z = h$ ein Minimum. Demnach wird in diesem Falle der materielle Punkt nur bis zu dem durch $z = \frac{c^2}{2g}$ bestimmten Parallelkreise aufwärts und nur bis zu dem ursprünglichen durch $z = h$ bestimmten

Parallelkreise abwärts gehen; er wird sich somit zwischen diesen beiden Parallelkreisen bewegen.

2) $c < \sqrt{2gh}$, d. h. $\frac{c_2}{2g} < h$; $z = \frac{c^2}{2g}$ ein Minimum, $z = h$ ein Maximum. Der Punkt wird sich von seiner Anfangslage nach unten bewegen bis zum Parallelkreise $z = \frac{c^2}{2g}$ und von da wieder nach oben.

3) $c = \sqrt{2gh}$, d. h. $\frac{c^2}{2g} = h$. Der materielle Punkt bleibt auf dem ursprünglichen Parallelkreise, ein Fall, der schon eingehend behandelt wurde.

Aus den Bewegungsgleichungen (2) ergibt sich

$$m.\ \frac{x d^2x + y d^2y - a d^2z}{dt^2} = amg - N.\sqrt{x^2+y^2+a^2}\ .$$

Es ist

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} - a\frac{dz}{dt} = o\ ,\quad \text{also}$$

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} - a\frac{d^2z}{dt^2} = -\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$= -\left(v^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)$$

$$= \frac{(4gz - 2c^2)(h-z)}{a+2z} - \left(c^2 + 2g(h-z)\right);$$

also

$$amg - N.\sqrt{x^2+y^2+a^2} = m\frac{(4gz-2c^2)(h-z)}{a+2z} - m\left(c^2+2g(h-z)\right),$$

$$N = \frac{m(c^2+ag)(a+2h)}{\sqrt{a}\,(a+2z)^{3/2}}.$$

Für den Fall $c = \sqrt{2gh}$ ergibt diese Formel die schon früher gefundene

$$N = mg\sqrt{\frac{a+2h}{a}}\ .$$

Da N nur von der Variabelen z abhängig ist, folgt unmittelbar, dass für einen und denselben Parallelkreis der Druck in allen Punkten, welche der Bahn angehören, derselbe ist.

§. 5.

Wir hatten

$$\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{\frac{(4gz-2c^2)(h-z)}{a+2z}};$$

Das obere Vorzeichen gilt für $c > \sqrt{2gh}$, das untere für $c < \sqrt{2gh}$. Mit Vernachlässigung des Vorzeichens ergibt sich

$$t = \int_h^z \sqrt{\frac{a+2z}{(4gz-2c^2)(h-z)}}\, dz.$$

Um dieses elliptische Integral auf die Normalform zu reduciren, setzen wir

$$a + 2h = m\,,\quad ag + c^2 = n\,,$$

$$\sqrt{(a+2z)(h-z)(4gz-2c^2)} = \sqrt{-\frac{A}{a}(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)(z-w_4)}\,,$$

wobei $w_1 < w_2 < w_3 < w_4$ sein soll. Dann ist

1) für $c > \sqrt{2gh}$:

$$A = -8g\,,\quad w_1 = -\frac{a}{2}\,,\quad w_2 = h\,,\quad w_3 = \frac{c^2}{2g}\,,$$

$$\left(\frac{1-k_1}{1+k_1}\right)^2 = \frac{(a+2h)g}{ag+c^2}\,,\quad \frac{1-k_1}{1+k_1} = \sqrt{\frac{mg}{n}}\,,\quad \text{wobei } k_1 < 1\,,$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{mg}}{\sqrt{n}+\sqrt{mg}}$$

2) für $c < \sqrt{2gh}$:

$$A = -8g\,,\quad w_1 = -\frac{a}{2}\,,\quad w_2 = \frac{c^2}{2g}\,,\quad w_3 = h\,,$$

$$\left(\frac{1-k_2}{1+k_2}\right)^2 = \frac{ag+c^2}{(a+2h)g}\,,\quad \frac{1-k_2}{1+k_2} = \sqrt{\frac{n}{mg}}\,,$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{mg}-\sqrt{n}}{\sqrt{mg}+\sqrt{n}}\,.$$

Wir behandeln beide Fälle wieder zusammen, indem wir statt k_1 und k_2 $\pm k$ schreiben, dann ist

$$\frac{dz}{\sqrt{(a+2z)(h-z)(4gz-2c^2)}} = \frac{2\sqrt{\pm k}\,dx}{\sqrt{-A(w_3-w_2)}\,\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$= 2\sqrt{\frac{\pm k}{-A(w_3-w_2)}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Vor der Wurzel muss das positive oder das negative Zeichen stehen, je nachdem x und z gleichzeitig abnehmen oder x mit abnehmendem z wächst. Der Factor $\sqrt{\frac{\pm k}{-A(w_3-w_2)}}$ nimmt für jeden der beiden vorher unterschiedenen Fälle den Werth $\sqrt{\frac{k}{-A(w_3-w_2)}}$ an, weil beim Uebergang vom einen zum andern k sowohl wie (w_3-w_2) das Zeichen ändert.

Wenn man bei weiterer Umformung setzt:

$$M = \sqrt{\frac{mn}{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{mg}},$$

so ergibt sich

$$dt = \pm M \frac{(1 \pm kx)^2 \quad dx}{(1-k^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$= \pm M \left[\frac{1+k^2x^2}{1-k^2x^2} \pm \frac{2kx}{1-k^2x^2}\right] \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2\,(1-k^2x^2)}}.$$

Wenn $z = h$, ist $x = -1$; wenn $z = \frac{c^2}{2g}$, ist $x = +1$, also hat man zu integriren,

1) wenn $c > \sqrt{2yh}$, für x von -1 bis $+1$,
2) wenn $c < \sqrt{2gh}$, für x von $+1$ bis -1.

Mithin wird

$$t = \pm M \int_{\mp 1}^{x} \frac{1+k^2x^2}{1-k^2x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$\pm 2kM \int_{\mp 1}^{x} \frac{x\,dx}{(1-k^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

oder, wenn man im zweiten Gliede $x^2 = y$ einsetzt,

$$t = \pm M \int_{\mp 1}^{x} \frac{1 + k^2x^2}{1 - k^2x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$\pm kM \int_{1}^{\sqrt{y}} \frac{dy}{(1-k_2y)\sqrt{(1-y)(1-k_2y)}} .$$

Es lässt sich indessen eine Formel für t noch in anderer Weise leicht ableiten. Wir setzen,

I wenn $c > \sqrt{2gh}$ ist,

$$\sin\vartheta = \sqrt{\frac{\frac{c^2}{2g} - z}{\frac{c^2}{2g} - h}} = \sqrt{\frac{(c^2 - 2gz)}{(c^2 - 2gh)}}$$

und nehmen, was keine Beschränkung ist, den Parallelkreis $z = \frac{c^2}{2g}$ als Anfangsort des materiellen Punktes an, dann wird

$$z = \frac{2gh\sin^2\vartheta + c^2\cos^2\vartheta}{2g} > o\,, \quad dz = \frac{2gh - c^2}{g} \sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta$$

$$h - z = \frac{(2gh - c^2)}{2g} \cos^2\vartheta < o\,, \quad z - \frac{c^2}{2g} = \frac{(2gh - c^2)}{2g} \sin^2\vartheta < o$$

$$\frac{dz}{\sqrt{(h-z)(z - \frac{c^2}{2g})}} = 2d\vartheta .$$

II wenn $c < \sqrt{2gh}$ ist,

$$\sin\vartheta = \sqrt{\frac{h - z}{h - \frac{c^2}{2g}}} = \sqrt{\frac{2g(h-z)}{2gh - c^2}},$$

dann wird

$$z = \frac{2gh\cos^2\vartheta + c^2\sin^2\vartheta}{2g} > o\,, \quad dz = \frac{-(2gh-c^2)}{g}\sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta < o\,,$$

$$h-z = \frac{2gh-c^2}{2g}\sin^2\vartheta > o\,, \quad z-\frac{c^2}{2g} = \frac{2gh-c^2}{2g}\cos^2\vartheta > o\,,$$

$$\frac{dz}{\sqrt{(h-z)(z-\frac{c^2}{2g})}} = -2d\vartheta.$$

Mithin wird in beiden Fällen

$$dt = \sqrt{\frac{a+2z}{g}}\,d\vartheta.$$

Sieht man vom Vorzeichen ab, so ist

I für $c > \sqrt{2gh}$,

$$h < z < \frac{c^2}{2g}\,, \text{ also}$$

$$\sqrt{\frac{a+2h}{g}}\,d\vartheta < dt < \frac{\sqrt{ag+c^2}}{g}\,d\vartheta.$$

Folglich wenn T die halbe Schwindungsdauer bezeichnet, d. h. die Zeit, welche der materielle Punkt von einem Parallelkreise zum andern braucht,

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a+2h}{g}} < T < \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{ag+c^2}}{g}\,;$$

II für $c < \sqrt{2gh}$ wird

$$\frac{c^2}{2g} < z < h\,, \text{ also}$$

$$\frac{\sqrt{ag+c^2}}{g}\,d\vartheta < dt < \sqrt{\frac{a+2h}{g}}\,d\vartheta\,,$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{ag+c^2}}{g} < T < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a+2h}{g}}\,.$$

Ferner wird

I für $c > \sqrt{2gh}$

$$dt = \frac{1}{g}\sqrt{ag + 2gh\sin^2\vartheta + c^2\cos^2\vartheta}\; d\vartheta\,,$$

$$= \frac{\sqrt{ag + c^2}}{g}\sqrt{1 - \frac{c^2 - 2gh}{ag + c^2}\sin^2\vartheta}\; d\vartheta\,,$$

$$= \frac{\sqrt{ag + c^2}}{g}\,\Delta\vartheta\, d\vartheta\,, \text{ wobei } k^2{}_1 = \frac{c^2 - 2gh}{c^2 + ag} > o \text{ ist;}$$

II für $c < \sqrt{2gh}$

$$dt = \frac{1}{g}\sqrt{ag + 2gh\cos^2\vartheta + c^2\sin^2\vartheta}\; d\vartheta\,,$$

$$= \sqrt{\frac{a + 2h}{g}}\sqrt{1 - \frac{2gh - c^2}{ag + 2gh}\sin^2\vartheta}\; d\vartheta\,,$$

$$= \sqrt{\frac{a + 2h}{g}}\,\Delta\vartheta\, d\vartheta\,, \text{ wobei } k^2{}_2 = \frac{2gh - c^2}{ag + 2gh} > o \text{ ist.}$$

In beiden Fällen ist

$$dt = N\Delta\vartheta\, d\vartheta\,,$$

wobei $N = \frac{\sqrt{ag + c^2}}{g}$ oder $N = \sqrt{\frac{a + 2h}{g}}$ ist; für $z = h$ wird $\vartheta = o$, für $z = \frac{c^2}{2g}$ wird $\vartheta = \frac{\pi}{2}$; mithin ergibt sich

$$T = N\int_o^{\pi/2} \Delta\vartheta\, d\vartheta = NE_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = NE.$$

Allgemein wird

$$t = NE(u)\,, \quad \text{wenn } u = \int_o^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta} \text{ ist;}$$

vermehrt man das Argument um $\pm 2K$, so wird
$E(u \pm 2K) = E(u) \pm E(2K) - \sin am(u \pm 2K)k^2 \sin am u . \sin am(\pm 2K)$,
oder, weil $\sin am(u \pm 2K) = -\sin am u$ ist,

$$E(u \pm 2K) = E(u) \pm 2E(K),$$

also

$$E(u \pm 2K) = E(u) \pm \frac{2T}{N},$$

$$NE(u \pm 2K) = NE(u) \pm 2T,$$

$$t \pm 2T = NE(u \pm 2K).$$

Wenn man also t um eine ganze Schwingungsdauer vermehrt oder vermindert, dann nimmt auch das Argument u in $E(u)$ um eine doppelte Periode zu oder ab, folglich kommt der materielle Punkt, wie nicht anders zu vermuthen war, nach einer ganzen Schwingung wieder auf den anfänglichen Parallelkreis zurück.

§. 6.

Es war

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c\sqrt{2ah}, \quad d\varphi = \frac{Cdt}{2az} = \frac{c\sqrt{2ah}}{2az}\, dt.$$

Mit Umwendung der Transformationsformeln erhalten wir

I wenn $c > \sqrt{2gh}$ ist,

$$d\varphi = \frac{C\sqrt{ag+c^2}}{a(2gh\sin^2\vartheta + c^2\cos^2\vartheta)} \sqrt{1 - \frac{c^2-2gh}{c^2+ag}\sin^2\vartheta}\, d\vartheta,$$

$$\frac{C\sqrt{ag+2gh}}{a(2gh\sin^2\vartheta + c^2\cos^2\vartheta)}\, d\vartheta < d\varphi < \frac{C\sqrt{ag+c^2}}{a(2gh\sin^2\vartheta + c^2\cos^2\vartheta)}\, d\vartheta,$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{C}{a} \cdot \sqrt{\frac{ag+2gh}{2ghc^2}} < \varphi < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{C}{a} \cdot \sqrt{\frac{ag+c^2}{2ghc^2}},$$

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a+2h}{a}} < \varphi < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{ag+c^2}{g}};$$

II wenn $c < \sqrt{2gh}$ ist,

$$d\varphi = \frac{C\sqrt{ag+2gh}}{a(2gh\cos^2\vartheta + c^2\sin^2\vartheta)} \sqrt{1 - \frac{2gh-c^2}{ag+2gh}\sin^2\vartheta}\, d\vartheta,$$

$$\frac{C\sqrt{ag+c^2}}{a(2gh\cos^2\vartheta + c^2\sin^2\vartheta)}\, d\vartheta < d\varphi < \frac{C\sqrt{ag+2gh}}{a(2gh\cos^2\vartheta + c^2\sin^2\vartheta)}\, d\vartheta,$$

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{C}{a} \cdot \sqrt{\frac{ag+c^2}{2ghc^2}} < \varphi < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{C}{ac}\sqrt{\frac{a+2h}{2h}},$$

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{ag+c^2}{ag}} < \varphi < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a+2h}{a}}.$$

Ferner wird

I wenn $c > \sqrt{2gh}$ ist,

$$d\varphi = \frac{C}{a}\sqrt{ag+c^2}\cdot\frac{\Delta\vartheta d\vartheta}{2gh\sin^2\vartheta + c^2\cos^2\vartheta},$$

$$= \frac{C\sqrt{ag+c^2}}{ac^2}\cdot\frac{\Delta\vartheta d\vartheta}{1+\lambda_1\sin^2\vartheta},$$

wobei $\lambda_1 = -\frac{c^2-2gh}{c^2}$, also $\lambda_1 \overset{<o}{>} k_1^2$ ist, so dass man setzen kann $\lambda_1 = -k_1^2\sin^2 am\alpha_1$;

II wenn $c < \sqrt{2gh}$ ist,

$$d\varphi = \frac{C}{a}\sqrt{ag+2gh}\cdot\frac{\Delta\vartheta d\vartheta}{2gh\cos^2\vartheta + c^2\sin^2\vartheta},$$

$$= \frac{C\sqrt{ag+2gh}}{2agh}\cdot\frac{\Delta\vartheta d\vartheta}{1+\lambda_2\sin^2\vartheta},$$

wobei $\lambda_2 = -\frac{2gh-c^2}{2gh}$, also $\lambda_2 \overset{<o}{>} k_1^2$ ist, so dass man setzen kann $\lambda_2 = -k_2^2\sin^2 am\alpha_2$.

Mit Weglassung der Indices behandeln wir beide Fälle zusammen und setzen

$$\Pi(u,\alpha) = \int_o^u \frac{k^2\sin am\alpha\cos am\alpha\,\Delta am\alpha\sin^2 amu}{1-k^2\sin^2 am\alpha\sin^2 amu}\,du,$$

oder

$$\Pi(u,\alpha) = \int_o^{\vartheta} \frac{k^2\sin^2 am\alpha\cos am\alpha\,\Delta am\alpha\sin^2\vartheta}{(1+\lambda\sin^2\vartheta)\Delta\vartheta}\,d\vartheta.$$

Es ist

$$\int_0^{\vartheta} \frac{\Delta^2\vartheta d\vartheta}{(1+\lambda\sin^2\vartheta)\Delta\vartheta} = \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1+\lambda\sin^2\vartheta)\Delta\vartheta} - \int_0^{\vartheta} \frac{k^2\sin^2\vartheta d\vartheta}{(1+\lambda\sin^2\vartheta)\Delta\vartheta};$$

bezeichnen wir in der vorhergehenden Entwickelung die Constanten $\frac{C\sqrt{ag+c^2}}{ac^2}$ und $\frac{C\sqrt{ag+2gh}}{2agh}$ zusammenfassend mit L, dann wird

$$\frac{\varphi}{L} = \int_0^{\vartheta} \frac{\Delta\vartheta d\vartheta}{(1+\lambda\sin^2\vartheta)} = u + \frac{tgam\alpha}{\Delta am\alpha}\Pi(u,\alpha) - \frac{\Pi(u,\alpha)}{\sin am\alpha\cos am\alpha\,\Delta am\alpha}$$

$$= u - \frac{\cot am\alpha}{\Delta am\alpha}\Pi(u,\alpha)$$

oder, wenn $\lambda = -k^2\sin^2 am(i\alpha_0 + K)$ gesetzt wird,

$$\frac{\varphi}{L} = u + i\frac{\sin am(\alpha_0,k')\Delta am(\alpha_0,k')}{\cos am(\alpha_0,k')}\Pi(u,i\alpha_0+K).$$

Nach §. 5 war

$$t = NE(u),\ T = NE,$$

folglich ergibt sich mit Hilfe der Relation $E(u) = \frac{E}{K}u + Z(u)$:

$$\frac{t}{T} = \frac{E(u)}{E} = \frac{u}{K} + \frac{Z(u)}{E};$$

mithin

$$u = \left(\frac{t}{T} - \frac{Z(u)}{E}\right)K.$$

Ferner ist allgemein

$$\Pi(u,\alpha) = uZ(\alpha) + \frac{1}{2}\,lg\frac{\Theta(u-\alpha)}{\Theta(u+\alpha)};$$

demnach wird

$$\frac{\varphi}{L}=\left(\frac{t}{T}-\frac{Z(u)}{E}\right)K+i\,\frac{\sin am(\alpha_0,k')\,\Delta am(\alpha_0,k')}{\cos am(\alpha_0,k')}\cdot$$

$$\left[uZ(i\alpha_0+K)+\frac{1}{2}\,lg\,\frac{\Theta(u-i\alpha_0-K)}{\Theta(u+i\alpha_0+K)}\right]=K\left(\frac{t}{T}-\frac{Z(u)}{E}\right)\cdot$$

$$\left[1+i\frac{\sin am(\alpha_0,k')\,\Delta am(\alpha_0,k')}{\cos am(\alpha_0,k')}\,Z(i\alpha_0+K)\right]$$

$$+\frac{i}{2}\,\frac{\sin am(\alpha_0,k')\,\Delta am(\alpha_0,k')}{\cos am(\alpha_0,k')}\,lg\,\frac{\Theta(u-i\alpha_0-K)}{\Theta(u+i\alpha_0+K)}\cdot$$

Ist nun Φ der Winkel, welcher den Grenzen $z=h$ und $z=\frac{c^2}{2g}$ entspricht, dann ist

$$\frac{\Phi}{L}=K+i\,\frac{\sin am(\alpha_0,k')\,\Delta am(\alpha_0,k')}{\cos am(\alpha_0,k')}\,\Pi(K,i\alpha_0+K),$$

$$=K\left(1+i\,\frac{\sin am(\alpha_0,k')\,\Delta am(\alpha_0,k')}{\cos am(\alpha_0,k')}\,Z(i\alpha_0+K)\right).$$

Mithin

$$\varphi=\Phi\left(\frac{t}{T}-\frac{Z(u)}{E}\right)+\frac{L.i}{2}\cdot\frac{\sin am(\alpha_0,k')\,\Delta am(\alpha_0,k')}{\cos am(\alpha_0,k')}\,lg\,\frac{\Theta(u-i_{\alpha_0}-K)}{\Theta(u+i\alpha_0+K)};$$

nun wird

$\Theta(-u)=\Theta(u)$, $\Theta(u+2K)=\Theta(u-2K)$, $\Theta(u+K)=\Theta(u-K)$,
$Z(o)=o$, $Z(K)=o$, $Z(-u)=-Z(u)$, $Z(u+2K)=Z(u)$,

also entsprechen sich die folgenden Werthe

$$\begin{array}{llllllll} t=o, & T, & 2T, & 3T, & . & . & . & . \\ u=o, & K, & 2K, & 3K, & . & . & . & . \\ \varphi=o, & \Phi, & 2\Phi, & 3\Phi & . & . & . & . \end{array}$$

Die Bahn des beweglichen Punktes besteht aus lauter congruenten Theilen; wenn $\pi:\Phi$ ein rationales Verhältniss ist, wird der Punkt nach mehrern Schwingungen zu seiner Anfangslage zurückkehren. Durch verschiedene Transformationen lässt sich ferner nachweisen, dass $\Phi>\frac{\pi}{2}$ ist, ein Ergebnis, zu welchem wir schon vorher gelangten: Die Schnittpunkte der Bahn mit den Parallelkreisen werden also in der Richtung der Bewegung fortschreiten.

§. 7.

Es ist $ds = \sqrt{c^2 + 2g(h-z)}\, dt$, also

I für $c > \sqrt{2gh}$, wenn $z = \frac{c^2}{2g}$ die Anfangslage des materiellen Punktes bestimmt,

$$ds = \sqrt{c^2 + 2g\left(\frac{c^2}{2g} - z\right)} \cdot \frac{\sqrt{ag + c^2}}{g} \Delta\vartheta d\vartheta,$$

$$= \frac{c\sqrt{ag+c^2}}{g} \sqrt{1 + \frac{c^2 - 2gh}{c^2} \sin^2\vartheta}\, \Delta\vartheta d\vartheta,$$

$$= \frac{c\sqrt{ag+c^2}}{g} \sqrt{1+\mu_1 \sin^2\vartheta}\, \Delta\vartheta d\vartheta, \text{ wobei } \mu_1 = \frac{c^2-2gh}{c^2} \begin{matrix} > 0 \\ < k_1^2 \end{matrix} \text{ ist;}$$

II für $c < \sqrt{2gh}$

$$ds = \sqrt{c^2 + 2g(h-z)} \sqrt{\frac{a+2h}{g}}\, \Delta\vartheta d\vartheta,$$

$$= c\sqrt{\frac{a+2h}{g}} \sqrt{1 + \frac{2gh - c^2}{c^2} \sin^2\vartheta}\, \Delta\vartheta d\vartheta,$$

$$= c\sqrt{\frac{a+2h}{g}} \sqrt{1+\mu_2 \sin^2\vartheta}\, \Delta\vartheta d\vartheta, \text{ wobei } \mu_2 = \frac{2gh-c^2}{c^2} \begin{matrix} > 0 \\ < k_2^2 \end{matrix} \text{ ist.}$$

Wenn wir beide Fälle wieder zusammenfassen und wieder N statt $\frac{\sqrt{ag+c^2}}{g}$ oder $\sqrt{\frac{a+2h}{g}}$ schreiben, so ergibt sich

$$ds = cN\sqrt{1+\mu\sin^2\vartheta}\,\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}\, d\vartheta,$$

$$= cN \frac{\sqrt{1-\mu^2\sin^4\vartheta}\,\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}}{\sqrt{1-\mu\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta,$$

$$\frac{cN}{\sqrt{1-\mu\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta > ds > cN \frac{\sqrt{1-\mu^2}\,\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-\mu\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta,$$

$$cN \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\Delta(\vartheta, \sqrt{\mu})} > s > cN\sqrt{1-\mu^2}\,\sqrt{1-k^2} \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\Delta(\vartheta, \sqrt{\mu})},$$

$$cNF(\vartheta, \sqrt{\mu}) > s > cN\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-k^2}\ F(\vartheta, \sqrt{\mu}).$$

Folglich wenn S die Länge des Bogens zwischen den Parallelkreisen bezeichnet

$$cNK > S > cN\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-k^2}\ K.$$

Ferner wird

$$ds = cN\sqrt{1+(\mu-k^2)\sin^2\vartheta-\mu k^2\sin^4\vartheta}\ d\vartheta,$$

oder wenn man substituirt $\sin^2\vartheta = x$,

$$ds = \frac{cN}{2}\sqrt{\frac{1+(\mu-k^2)x-\mu k^2x^2}{x(1-x^2)}}\ dx,$$

$$s = \frac{cN}{2}\int_0^x \sqrt{\frac{1+(\mu-k^2)x-\mu k^2x^2}{x(1-x^2)}}\ dx,$$

$$S = \frac{cN}{2}\int_0^1 \sqrt{\frac{1+(\mu-k^2)x-\mu k^2x^2}{x(1-x^2)}}\ dx.$$

§. 8.

Wir untersuchen analog den Ausführungen für die Bewegung auf der Kugel speziell noch den Fall, dass sich der bewegliche Punkt nur wenig vor der vertikalen z-Axe entfernt, dass also die Anfangsgeschwindigkeit c sehr klein und nur wenig von Null verschieden ist.
In diesem Falle wird $N = mg$, also die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g\frac{x}{a} = o,\quad \frac{d^2y}{dt^2} + g\frac{y}{a} = o,\quad \frac{d^2z}{dt^2} + g\frac{z}{a} = o;$$

$$x = A_1\cos t\sqrt{\frac{g}{a}} + B_1\sin t\sqrt{\frac{g}{a}},\ y = A_2\cos t\sqrt{\frac{g}{a}} + B_2\sin t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

$$z = A_3\cos t\sqrt{\frac{g}{a}} + B_3\sin t\sqrt{\frac{g}{a}};$$

$$\frac{dx}{dt} = -A_1\sqrt{\frac{g}{a}}\sin t\sqrt{\frac{g}{a}} + B_1\sqrt{\frac{g}{a}}\cos t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

$$\frac{dy}{dt} = -A_2\sqrt{\frac{g}{a}}\sin t\sqrt{\frac{g}{a}} + B_2\sqrt{\frac{g}{a}}\cos t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

$$\frac{dz}{dt} = -A_3\sqrt{\frac{g}{a}}\sin t\sqrt{\frac{g}{a}} + B_3\sqrt{\frac{g}{a}}\cos t\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Die sechs Integrationsconstanten werden durch die schon einmal benutzten Anfangswerthe für $t = o$ bestimmt:

$$x = \sqrt{2ah},\ y = o,\ z = h,\ \left(\frac{dx}{dt}\right) = o,\ \left(\frac{dy}{dt}\right) = c,\ \left(\frac{dz}{dt}\right) o,$$

und es ergeben sich

$$x = \sqrt{2ah}\cos t\sqrt{\frac{g}{a}},\ y = c\sqrt{\frac{a}{g}}\sin t\sqrt{\frac{g}{a}},\ z = h\cos t\sqrt{\frac{g}{a}},$$

also

$$\frac{x^2}{2ah} + \frac{y^2}{c^2a/g} = 1,$$

d. h. die Projection der Bahn auf die xy-Ebene ist eine Ellipse, welche für $c = \sqrt{2gh}$ in den Kreis $x^2 + y^2 = 2ah$ übergeht, wie zu erwarten war. Die Bahnprojection auf die xy-Ebene ist ferner auch dann nahezu eine Ellipse, wenn der Winkel, welchen der Radiusvector des beweglichen Punktes mit der z-Axe macht, nur wenig variirt, d. h. wenn die beiden Parallelkreise, zwischen denen sich der Punkt bewegt, nur einen geringen Abstand haben.

Aus den obigen Gleichungen folgt ferner

$$\frac{y}{x} = \frac{c}{\sqrt{2gh}}\,tg\,t\sqrt{\frac{g}{a}} = tg\varphi,$$

wenn φ der Polarwinkel der Projection ist. Vermehrt man t um $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, so nimmt die linke Seite ihren ursprünglichen Werth wieder an; mithin ist $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ die halbe, $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ die ganze Umlaufszeit, und diese ist demnach gleich der Oscillationsdauer eines Pendels von der Länge $\sqrt{a}$ bei kleinen Elongationen. — Entsprechende Werthe von t und φ sind:

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \quad , \quad \pi\sqrt{\frac{a}{g}} \quad , \quad \frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}} \quad , \quad 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}} \quad , \quad \ldots \ldots$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \pi \quad , \quad \frac{3}{2}\pi \quad , \quad 2\pi \quad , \quad \ldots \ldots$$

Folglich steht die durch die z-Axe und den beweglichen Punkt gelegte Ebene für $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}, \frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}, \ldots$ auf ihrer Anfangslage senkrecht; und diese Ebene braucht zu den vier Vierteln einer ganzen Umdrehung die Zeit $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$ und zu jeder Drehung um π von einer beliebigen Anfangslage aus gleichviel Zeit.

§. 9.

Nach Behandlung der drei Fälle $c \gtrless \sqrt{2gh}$ bleibt noch eine Discussion des Falles $c = o$ übrig. Eine Betrachtung der früher gewonnenen Resultate zeigt, dass für $c = o$ die Bahnprojectionen auf die xy- und auf die yz-Ebene gerade Linien und die auf die xz-Ebene eine Parabel wird, nämlich die Bahn des materiellen Punktes selbst.
Es wird

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{4gz(h-z)}{a+2z}},$$

also $z = h$ das Maximum und $z = o$ das Minimum, d. h. der Punkt geht durch den Scheitel des Rotationsparaboloids.
Ferner wird der Druck

$$N = \frac{mg\sqrt{a}(a+2h)}{(a+2z)^{3/2}},$$

also für den höchsten Punkt

$$N_h = \frac{mg\sqrt{a}}{\sqrt{a+2h}},$$

und für den tiefsten Punkt

$$N_o = \frac{mg}{a}(a+2h).$$

Für die Zeit t gelten alle die früher für den Fall $c < \sqrt{2gh}$ entwickelten Formeln, wenn $c = o$ gesetzt wird; dieselben lassen sich aber sonst nicht weiter vereinfachen.

Der materielle Punkt fällt auf der Parabel $x^2 = 2az$ bis zum Scheitel und steigt dann vermöge der erhaltenen Geschwindigkeit auf dem andern Zweige bis zur gleichen Höhe mit dem Ausgangspunkte; alsdann fällt er wieder und setzt so seine Bewegungen periodisch fort.

Für die Berechnung des Bogens ergibt sich

$$ds = \sqrt{2g(h-z)}\,dt = \frac{\sqrt{2g(h-z)}\sqrt{a+2z}}{2\sqrt{g}\sqrt{z(h-z)}}\,dz = \frac{a+2z}{\sqrt{az(a+2z)}}\,dz,$$

$$s = -\int_z^h \sqrt{\frac{a+2z}{2z(a+2z)}}\,dz = -\frac{a}{\sqrt{2}}\int_z^h \frac{dz}{\sqrt{az+2z^2}}\,dz$$

$$-\sqrt{2}\int_z^h \frac{z\,dz}{\sqrt{az+2z^2}},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{az+2z^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{ah+2h^2}$$

$$-\frac{a}{4}\,l\,\frac{a+4h+2\sqrt{2}\,\sqrt{ah+2h^2}}{a+4z+2\sqrt{2}\,\sqrt{az+2z^2}};$$

also S d. h. der Bogen von $z = h$ bis zum Scheitel

$$S = -\frac{1}{2}\left[\sqrt{2ah+4h^2} + al\,\frac{\sqrt{2ah}+\sqrt{a^2+2ah}}{a}\right].$$

Druck von C. L. Pfeil in Marburg.